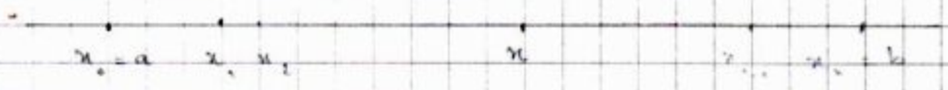
Intégrales simples

1 _ Intégrale de Riemann :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée

Soit $x_0, x_1, \dots, x_n$ une suite finie d'éléments de $[a,b]$ avec :

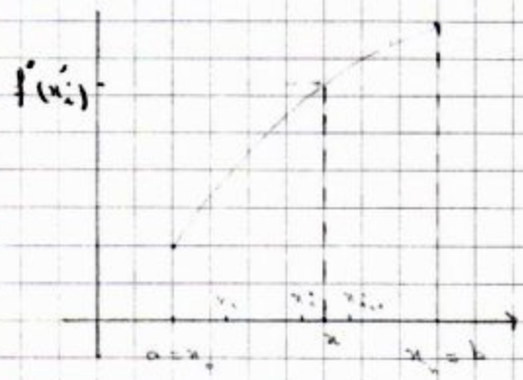
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



On dit que $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$

On a $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$

On appelle module de cette subdivision le nombre : $|\sigma| = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$



Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ je me fixe un point $x'_i \in [x_i, x_{i+1}]$

le nombre :

$$S_\sigma = f(x'_0)(x_1 - x_0) + f(x'_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x'_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots$$
$$+ f(x'_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x'_i)(x_{i+1} - x_i)$$

est appellé la somme de Riemann de f sur $[a,b]$, associée à σ

Lorsque la subdivision σ de $[a,b]$ varie, la somme de Riemann S_σ varie aussi : $(S_\sigma)_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]}$

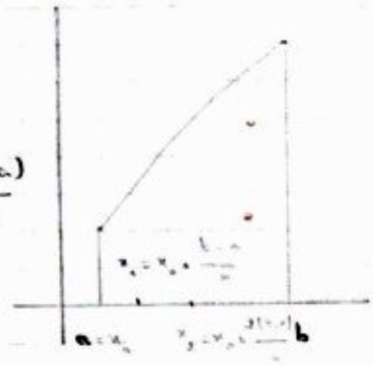
Proposition : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors les sommes de Riemann S_σ de f sur $[a,b]$ associées aux subdivisions σ de $[a,b]$, tendent vers une limite $l \in \mathbb{R}$, finie, lorsque le module des subdivision tend vers 0, c-à-d

$$\lim_{|\sigma| \to 0} S_\sigma = l \in \mathbb{R}$$

Par définition l est l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$, on la note $l = \int_a^b f(t)\,dt$. C'est exactement l'aire comprise entre la courbe de f, l'axe (ox) et les droite $x = a$ et $x = b$

Exemple :

$\underline{n \in \mathbb{N}^*}$ $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue



On considère la subdivision de $[a,b]$

σ_n donnée par : $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}$, ..., $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, ..., $x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$

On a : $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

le module de σ_n est $|\sigma_n| = \frac{b-a}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on se fixe $x'_i = x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$

La somme de Riemann associée à σ_n est :

$$S_{\sigma_n} = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$$

On obtient une suite $(S_{\sigma_n})_n$. $u_n = S_{\sigma_n}$

D'après la proposition précedente, on a : $\boxed{\lim_n u_n = \lim_n S_{\sigma_n} = \int_a^b f(t)\,dt}$

* <u>Primitive d'une fonction</u> :

Déf : Soit f une fonction de $[a,b] \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur $[a,b]$ toute fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq : $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$

Rq : • Si F une primitive de f sur $[a,b]$, alors $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f sur $[a,b]$

• Si F, G sont 2 primitive de f sur $[a,b]$, alors $\exists c \in \mathbb{R}$ tq :

$$F = G + c$$

Dém :

$$h = F - G \Rightarrow h' = F' - G' = f - f = 0$$

sur $[a,b]$ $\Rightarrow h = c$ cste

ETUSUP .com

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f admet une primitive F sur $[a,b]$. De plus, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Exemple : Calculer $I = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

$$= [\operatorname{Arg ch} x]_2^{\sqrt{5}} = [\log(x + \sqrt{x^2-1})]_2^{\sqrt{5}}$$
$$= \log(2+\sqrt{5}) - \log(2+\sqrt{3})$$
$$= \log\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

Exercice : On considère la suite $U_n = \frac{n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+(n-1))^2}{n^3}$

Mq (U_n) est conv et calculer sa limite.

<u>Indication</u> : Utiliser la somme de Riemann dans l'exemple ci-dessus.

Remarque : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Soit $c \in [a,b]$. Alors :

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur $[a,b]$ et qui s'annulle en c

c-à-d : $\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

Dém :
$$\int_c^x f(t)\,dt = F(x) - F(c)$$

Exercice : Soit $h : [1,2] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto h(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$$

Mq h est dérivable sur $[1,2]$ et calculer h'

Proposition : f, g $[a,b] \to \mathbb{R}$ continues

Alors :

- $\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, c cste
- $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

ETUSUP .com

d - $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

e - $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Dém :

a - F une primitive de $f \Rightarrow cF$ est une primitive de cf

b - $\left.\begin{array}{l} F \text{ primitive de } f \\ G \text{ primitive de } g \end{array}\right\} \Rightarrow F + G$ primitive de $f+g$

c - $h = F - G$ sur $[a,b]$

F primitive de f

G primitive de g

$h'(x) = f(x) - g(x) \leq 0 \quad . \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow h$ sur $[a,b] \Rightarrow h(a) \geq h(b)$

$\Rightarrow F(a) - G(a) \geq F(b) - G(b)$

$\Rightarrow F(a) - F(b) \geq G(a) - G(b)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

d - $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad . \forall x \in [a,b]$

d'après c) on a : $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

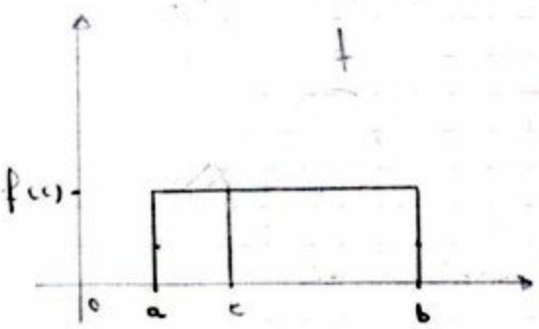
$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Proposition : (Formule de la moyenne)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

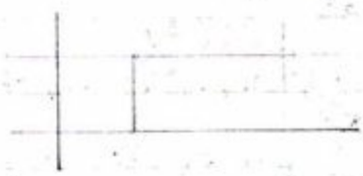
Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)}$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$



Aire hachurée = aire du rectangle

$[0, f(c)] \times [a,b]$



Dém : Conséquence du T.A.F

F primitive de f sur $[a,b]$

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad (F') = f$

F dérivable sur $[a,b]$ $\quad \exists\, c \in]a,b[$ tq : $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$

Proposition : (changement de variable)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et soit $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ de classe C^1 (c-à-d g dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et g' est continue sur $[a,b]$) avec $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$. Alors : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$

(c-à-d on pose $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt$)

$$[\alpha,\beta] \xrightarrow{g} [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Dém.

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F\circ g)'(t)$$

$$= [F\circ g]_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : Calculons $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

On va poser $x = tg\,t = g(t)$

$$\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \xrightarrow{g} [-1,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$t \to g(t) = tg\,t \qquad x \to f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$\alpha = \frac{-\pi}{4}$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$

$g' : \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ continue

$t \to g'(t) = 1 + tg^2\,t$

g de classe C^1 sur $\left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+tg^2\,t)\sqrt{1+tg^2\,t}}\,(1+tg^2\,t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos t|\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt$$

ETUSUP .com

$= [\sin t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}}$

On remarque que la méthode de changement de variable nous a permis de remplacer la fonction $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ difficile à intégrer par la fonction $\cos x$ facile à intégrer.

Proposition : (Intégration par parties)

Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 alors :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

Dém : $(u(x)\, v(x))' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$

Ex : $I = \int_0^1 \operatorname{Arctg} x \, dx$

$u(x) = \operatorname{Arctg} x \qquad v' = 1$

$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad v = x$

$$I = [x \operatorname{Arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= [x \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)]_0^1$$

$$= \operatorname{Arctan} 1 - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2}$$

3 - Calcul des primitives :

a - Primitives usuelles :

Les primitives de f seront notées par $\int f(x)\, dx$

$\to \int x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ si } \alpha \neq -1 \\ \log|x| + c \text{ si } \alpha = -1 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\to \int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\to \int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\to \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$

$\to \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c$

$\to \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{Arcsin} x + c$

$\to \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Argsh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2+1}) + c$

$\to \int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x + c$

ETUSUP .com

$$\rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \log|x+\sqrt{x^2+1}|+c & \text{si } x \neq 1 \\ \operatorname{Arg ch} x + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b. Intégrales des fonctions rationnelles :

D'après le cours d'algèbre toute fonction rationnel a coefficients réels s'écrit comme somme d'un polynôme et des fcts de la forme :

$$\frac{A}{(x-a)^n} \text{ et } \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n} \quad \text{avec } b^2-4c<0$$

$(A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*)$

le problème de recherche de primitive d'une fct rationnel se ramène à la recherche des primitives de fcts ci-dessus :

* pour un polynôme il n'y a pas de problème

* $$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \log|x-a|+c & ; n=1 \\ \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+c & ; \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

* $$\int \frac{Bx+c}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$$

Puisque $b^2-4c<0$, on peut écrire $x^2+bx+c=(x-p)^2+q^2$

En effet : $$x^2+bx+c = x^2+2\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{4}+c-\frac{b^2}{4}$$
$$= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}$$
$$= (x-p)^2+q^2$$

avec : $p=\frac{-b}{2}$, $q=\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}$

* on va faire le changement de variable $\boxed{x-p=qt}$ c-à-d :

$$t=\frac{x-p}{q}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2)^n}\,dx$$
$$= \int \frac{B't+C'}{(t^2+1)^n}\,dt \qquad q^2t^2+q^2=q^2(1+t^2)$$

$$= B'\underbrace{\int \frac{t}{(1+t^2)^n}\,dt}_{J_n} + C'\underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt}_{I_n}$$

ETUSUP .com

* $J_n = \int \frac{t}{(1+t^2)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2}\int (1+t^2)^{-n}\,(2t)$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\log(1+t^2) + c & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2}\,\frac{(1+t)^{-n+1}}{-n+1} + c & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

* $I_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$

→ si $n = 1$; $I_1 = \text{Arctg}\, t + c$

→ si $n \geq 1$: $u = \frac{1}{(1+t^2)^n}$; $v' = 1$

$u' = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$; $v = t$

$$I_n = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right] + 2n\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right] + 2n\int \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right] + 2n\,(I_n - I_{n+1})$$

D'on la relation :

$$\boxed{2n\,I_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)\,I_n}$$

Calculer : $I_3 = \int \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt$

$I_1 = \text{Arctg}\, t + c$

<u>$n = 1$</u> : $2\,I_2 = \frac{t}{(1+t^2)} + I_1$

$I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{1+t^2} + \text{Arctg}\, t\right] + c$

<u>$n = 2$</u> : $4\,I_3 = \frac{t}{(1+t^2)^2} + 3\,I_2$

c - Applications :

ETUSUP .com

Les Intégrales suivantes se ramenent à des intégrales de fonctions rationnelles :

* Intégrales de la forme $I = \int f(e^x)\,dx$ avec <u>une fonction rationnelle</u>.

Ex : $h(x) = \text{th}\,x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

$= f(e^x) \qquad f(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$

. f est une fraction rationnelle.

Dans ce cas on pose $\boxed{t = e^x}$

$dt = e^x\,dx = t\,dx \Rightarrow \boxed{dx = \dfrac{dt}{t}}$

$I = \int f(e^x)\,dx = \int \dfrac{f(t)}{t}\,dt$

* Intégrales de la forme : $I = \int f(\sin x, \cos x)\,dx$

où f est une fct rationnelle de deux variables

Ex : $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$

$I = \int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,dx$

$= \int f(\sin x, \cos x)\,dx$

2) $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos x + \sin^2 x}\,dx$, $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y + x^2}$

on fait le changement de variable $\boxed{t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

$dt = \frac{1}{2}\left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(1 + t^2)\,dx$

d'où : $\boxed{dx = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}}$

$\boxed{\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}} \qquad \boxed{\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}}$

$I = \int f(\sin x, \cos x) = \int \underbrace{f\left(\dfrac{2t}{1 + t^2}, \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \cdot \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}}_{\text{c'est une fraction rationnelle en } t}$

Ex Calculer $I = \int \dfrac{1}{2 + \sin x}\,dx$

ETUSUP .com

On pose $t = tg\,\frac{x}{2}$

$$I = \int \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dt \quad \text{, on pose } t+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$$

$$dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{\frac{3}{4}(u^2+1)}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4}{3}\,\text{Arctg}\,u + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arctg}\,u + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arctg}\left(\frac{2\,tg(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Exercice : Calculer :

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2}\,dx \;;\; \int \frac{dx}{2+\cos x} \;;\; \int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$$

La méthode ci-dessus conduit souvent à des fct rationnelles en t.

Dans certains cas on peut utiliser un changement de variable plus simple, ainsi pour :

- $\int f(\sin x)\cos x\,dx$, on pose $t = \sin x$

  $= \int f(t)\,dt \qquad dt = \cos dx$

- $\int f(\cos x)\sin x\,dx$, on pose $t = \cos x$

  $= -\int f(t)\,dt$

- $\int f(tg\,x)\,dx$, on pose $t = tg\,x$

Ex :

$$I = \int \sin^3 x\,dx$$

$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$= \int f(\cos x)\sin x\,dx$$

$$f(t) = 1-t^2$$

on pose $t = \cos x$

$$= -\int (1-t^2)\,dt = \int (t^2-1)\,dt$$

ETUSUP .com

plus généralement si la quantité $A = R(\sin x, \cos x)\,dx$ est invariante quand on change :

- x en $\pi - x$, on pose $t = \sin x$

$R(\sin(\pi - x), \cos(\pi - x))\, d(\pi - x) = R(\sin x, \cos x)\, dx$

- x en $-x$, on pose $t = \cos x$
- x en $\pi + x$, on pose $t = tg\, x$

Ex : Calculer $I = \int \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$

$\frac{d(x+\pi)}{1+\sin^2(x+\pi)} = \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ on pose $t = tg\, x$

$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$

$= \int \frac{1+tg^2 x}{1+2tg^2 x}\, dx$ on pose $t = tg\, x$

$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{1+2t^2} \frac{dt}{\cancel{1+t^2}}$

$= \int \frac{dt}{1+2t^2}\, dt$

$= \int \frac{du}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg} u + c$ $\boxed{\begin{array}{l} u = \sqrt{2}\, t \\ du = \sqrt{2}\, dt \end{array}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}(\sqrt{2}\, tg\, x) + c$

- Intégrale de la forme $I = \int f(sh\, x, ch\, x)\, dx$ où f est une fonction rationnelle.

on pose $\boxed{t = th \frac{x}{2}}$ on a : $\boxed{sh\, x = \frac{2t}{1-t^2}}$

et $\boxed{ch\, x = \frac{1+t^2}{1-t^2}}$ $\boxed{dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}}$

$I = \int f\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{2\,dt}{1-t^2}$

- Intégrale de la forme $I = \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ $n \in \mathbb{N}^*$ où f est une fct rationnelle de deux variables.

ETUSUP .com

on pose $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$

$$\Rightarrow y^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

et on exprime x en fct de y ~~posse~~ puis on se ramène à l'intégrale d'une fct rationnelle en y.

Exercice : Calculer $I = \int \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\, dx \qquad 0 \leq x < 1$

poser $y = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

$$y^2 = \frac{x}{1-x}$$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..